Ensembles

Exercice 1.

On considère l'ensemble ambiant

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

et les parties de E suivantes

$$A = \{1, 3, 5\}\,, \quad B = \{2, 3, 4, 7\} \text{ et } C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$$

Déterminer $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap C$, A^c, $A \setminus B$, $(A \cup B)^c$, $A^c \cap B^c$, $A \cap (B \cup C)$, $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$\begin{gathered}
A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \\
A \cap B = \{3\} \\
A \cap C = \{3, 5\} \\
A^c = \{2, 4, 6, 7\} \\
A \setminus B = \{1, 5\} \\
(A \cup B)^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}^c = \{6\} \\
A^c \cap B^c = \{2, 4, 6, 7\} \cap \{1, 3, 5, 6\} = \{6\} \\
A \cap (B \cup C) = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 5\} \\
(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3\} \cup \{3, 5\} = \{3, 5\}
\end{gathered}$$

Exercice 2.

Remplacer les pointillés par l'un des symboles $\in$, $\notin$ ou $\subset$:

$$5 \ldots \mathbb{N}, \quad -7 \ldots \mathbb{N}, \quad 5 \ldots \mathscr{P}(\mathbb{N}), \quad \{5\} \ldots \mathbb{N}, \quad \{5\} \ldots \mathscr{P}(\mathbb{N}), \quad \{-1, 5\} \ldots \mathscr{P}(\mathbb{N})$$

$$5 \in \mathbb{N}, \quad -7 \notin \mathbb{N}, \quad 5 \notin \mathscr{P}(\mathbb{N}), \quad \{5\} \subset \mathbb{N}, \quad \{5\} \in \mathscr{P}(\mathbb{N}), \quad \{-1, 5\} \notin \mathscr{P}(\mathbb{N})$$

Exercice 3.

Écrire en extension l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ de cardinal 3.

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

Exercice 4.

Soient A et B deux parties d'un ensemble. Montrer que

$$(A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A = B$$

Soit $x \in E$. Supposons que $x \in A$. Cela implique que $x \in A \cup B$. Or, par hypothèse on a $A \cap B = A \cup B$. Ainsi, $x \in A \cap B$ et donc en particulier $x \in B$.
On vient de prouver que $A \subset B$.
On établirait de manière analogue que $B \subset A$.
On obtient ainsi $A = B$.

Exercice 5. Différence symétrique

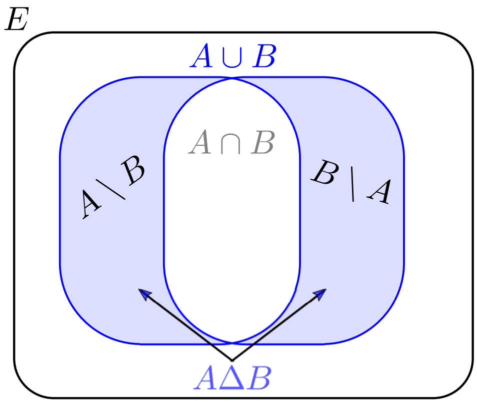
Soient E un ensemble, A et B deux parties de E.
On appelle *différence symétrique* de A et de B, le sous ensemble de E

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$$

Pour un ensemble fini E, montrer que

$$\operatorname{card}(A \Delta B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - 2 \operatorname{card}(A \cap B)$$

Les éléments de $A \Delta B$ sont les éléments qui appartiennent à A **ou bien** à B, i.e. les éléments qui appartiennent à A ou à B mais qui n'appartiennent pas à la fois à A et à B.



Si deux ensembles finis F et G sont **disjoints**, on a

$$\operatorname{card}(F \cup G) = \operatorname{card}(F) + \operatorname{card}(G)$$

Si A et B sont deux ensembles, on décompose $A \cup B$ en 3 sous-ensembles deux à deux disjoints :

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) = (A \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus (A \cap B))$$

et on a, d'après le *principe additif*,

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A \setminus (A \cap B)) + \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(B \setminus (A \cap B))$$

D'autre part, puisque si $R \subset S$, on a $\operatorname{card}(S \setminus R) = \operatorname{card}(S) - \operatorname{card}(R)$, on obtient

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(A \cap B) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$$

On obtient alors la formule classique

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$$

qui appliquée à $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ donne

$$\operatorname{card}(A \Delta B) = \operatorname{card}(A \cup B) - \operatorname{card}(A \cap B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - 2 \operatorname{card}(A \cap B)$$

EXERCICE 6. Fonction caractéristique

Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle *fonction caractéristique* de A l'application

$$\chi_A : \begin{array}{rcl} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \chi_A(x) = \left| \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{array} \right. \end{array}.$$

Soient A et B deux parties de E. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensembles que l'on déterminera :

1. $\mathbf{1} - \chi_A$
2. $\chi_A \times \chi_B$
3. $\chi_A + \chi_B - \chi_A \times \chi_B$

1. $\mathbf{1} - \chi_A$ est la fonction caractéristique du complémentaire $A^c = \bar{A}$ de A.
   En effet, on a $(\mathbf{1} - \chi_A)(x) = 0$ si $\chi_A(x) = 1$, i.e. si $x \in A$, ou encore si $x \notin \bar{A}$, et $(\mathbf{1} - \chi_A)(x) = 1$ si $\chi_A(x) = 0$, i.e. si $x \notin A$, ou encore si $x \in \bar{A}$.
2. $\chi_A \times \chi_B$ est la fonction caractéristique de $A \cap B$.
   On raisonne par disjonction des cas.

   1$^{\text{er}}$ cas : si $x \in A \cap B$, alors $\chi_A(x) = \chi_B(x) = 1$, et donc $\chi_A \times \chi_B(x) = 1$.

   2$^{\text{nd}}$ cas : si $x \notin A \cap B$, alors ou bien $x \notin A$ et $\chi_A(x) = 0$ ou bien $x \notin B$ et $\chi_B(x) = 0$. Dans tous les cas, $\chi_A \times \chi_B(x) = 0$.
3. $\chi_A + \chi_B - \chi_A \times \chi_B$ est la fonction caractéristique de $A \cup B$.
   En effet, si $x \notin A \cup B$, nécessairement $x \notin A$ et $x \notin B$, ce qui se traduit par $\chi_A(x) = 0$ et $\chi_B(x) = 0$ et ainsi $(\chi_A + \chi_B - \chi_A \times \chi_B)(x) = 0 + 0 - 0 \times 0 = 0$.
   Si $x \in A \cup B$, on distingue 3 cas.

   1$^{\text{er}}$ cas : si $x \in A$ et $x \in B$, on a $\chi_A(x) = 1$ et $\chi_B(x) = 1$ et ainsi $(\chi_A + \chi_B - \chi_A \times \chi_B)(x) = 1 + 1 - 1 \times 1 = 1$.

   2$^{\text{ème}}$ cas : si $x \in A$ et $x \notin B$, on a $\chi_A(x) = 1$ et $\chi_B(x) = 0$ et ainsi $(\chi_A + \chi_B - \chi_A \times \chi_B)(x) = 1 + 0 - 1 \times 0 = 1$.

   3$^{\text{ème}}$ cas : si $x \notin A$ et $x \in B$, on a $\chi_A(x) = 0$ et $\chi_B(x) = 1$ et ainsi $(\chi_A + \chi_B - \chi_A \times \chi_B)(x) = 0 + 1 - 0 \times 1 = 1$.