Fonctions : limites et continuité

Exercice 1. Ensembles de définition

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \sqrt{4-x^2}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{|x+2|-3}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{2\cos x - 1}$

1. L'ensemble de définition de f est

$$\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} :\ 4 - x^2 \geqslant 0\}$$

Le trinôme du second degré $4 - x^2$ se factorise en $(2+x)(2-x) = -(x+2)(x-2)$. Ayant 2 racines -2 et 2, il est du signe du coefficient dominant -1, i.e. négatif à l'extérieur de ces racines et du signe contraire, i.e.positif à l'intérieur de ces racines :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On obtient finalement $\mathscr{D}_f = [-2, 2]$.

2. L'ensemble de définition de f est

$$\mathscr{D}_g = \{x \in \mathbb{R} :\ |x+2| - 3 \neq 0\}$$

Or on a

$$|x+2| - 3 = 0 \iff |x-(-2)| = 3 \iff \left| \begin{array}{c} x = -2+3 \\ \text{ou} \\ x = -2-3 \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{c} x = 1 \\ \text{ou} \\ x = -5 \end{array} \right. .$$

On en déduit que $\mathscr{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-5, 1\}$.

3. L'ensemble de définition de h est

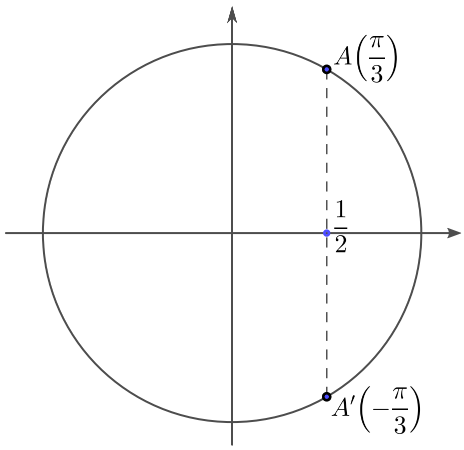
$$\mathscr{D}_h = \{x \in \mathbb{R} :\ 2\cos x - 1 \neq 0\}$$

Puisque l'on a

$$2\cos x - 1 = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \iff \left| \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k'\pi,\ k' \in \mathbb{Z} \end{array} \right. .$$

on obtient alors

$$\mathscr{D}_h = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\} \cup \bigcup_{k'\in\mathbb{Z}} \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k'\pi \right\} \right).$$



Exercice 2. Limites

Etudier les limites éventuelles en a des fonctions suivantes :

1. $a = 0$ $\quad f : x \mapsto \dfrac{x^2 + |x|}{x}$
2. $a = 1$ $\quad g : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1}$
3. $a = 0$ $\quad h : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$
4. $a = 0$ $\quad l : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
5. $a = -\infty$ $\quad m : x \mapsto \dfrac{2x^3 - x + 4}{3x + 1}$

1. Puisque $|x| = \left|\begin{array}{ll} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{array}\right.$, on a

   (a) Si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x} = x + 1$. Ainsi $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) = 1$.

   (b) Si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x} = x - 1$. On a alors $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = -1$.

   Puisque $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x)$, f n'a pas de limite en 0.

2. Puisque $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 - 4x + 3\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} \left(x^2 - 1\right) = 0$, on est en présence d'une forme indéterminée du type $\text{'}\dfrac{0}{0}\text{'}$. Puisque 1 est racine de chacun des trinômes, ces derniers peuvent être factorisés par $x - 1$.
   Le produit des racines du trinôme $x^2 - 4x + 3$ étant égal à $\dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{1} = 3$, sa deuxième racine vaut 3. [1]
   On a ainsi $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.
   D'autre part, on a de manière évidente $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$. Par conséquent,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\},\ g(x) = \frac{\cancel{(x-1)}(x-3}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x-3}{x+1}.$$

1. On aurait tout aussi bien faire la division polynomiale de $X^2 - 4X + 3$ par $X - 1$.

On obtient alors, d'après la limite du quotient puisque $\lim\limits_{x\to 1}(x+1) \neq 0$:

$$\lim_1 g = \lim_{x\to 1} \frac{x-3}{x+1} = \frac{1-3}{1+1} = -1.$$

3. Pour tout réel x différent de 0, on peut écrire $h(x) = \dfrac{\sin x - \sin 0}{x-0}$ qui n'est autre que la fonction taux d'accroissement $\tau_{\sin,0}$ de la fonction sinus en 0. Puisque sin est dérivable en 0, on a

$$\lim_{\substack{\neq \\ x\to 0}} \tau_{\sin,0}(x) = \lim_{\substack{\neq \\ x\to 0}} \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \sin'(0)$$

. Puisque $\sin' = \cos$, on en déduit que h a bien une limite en 0 qui est égale à $\sin'(0) = \cos 0 = 1$:

$$\lim_{\substack{\neq \\ x\to 0}} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Remarque : On peut prolonger la fonction h par continuité en 0. Le prolongement par continuité est la fonction

$$\begin{array}{rccc} \hat{h}\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} h(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Remarque : On obtiendrait par un raisonnement analogue $\lim\limits_{\substack{\neq \\ x\to 0}} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1.$

4. Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right) = \sqrt{1+0} - \sqrt{1-0} = 0$ et que $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, on est en présence d'une forme indéterminée du type $\text{'}\dfrac{0}{0}\text{'}$. On est amené à transformer ce quotient en utilisant l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1,1] \setminus \{0\},\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} &= \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} \\ &= \frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2}{x\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right)} \\ &= \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} \\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)} \end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right) = \sqrt{1+0} + \sqrt{1-0} = 2$ où $2 \neq 0$, d'après la limite du quotient de 2 fonctions, on obtient $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \dfrac{2}{2} = 1.$

5. On est en présence d'une forme indéterminée du type $\text{'}\dfrac{\infty}{\infty}\text{'}$. Toutefois, la fonction m étant une fonction rationnelle (quotient de 2 fonctions polynômes), sa limite en $-\infty$ est égale à la limite du rapport de ses monômes dominants :

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3 - x + 4}{3x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3}{3x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{3} = +\infty.$$

Exercice 3. Image d'un intervalle par une application continue

Déterminer l'image de l'intervalle $[-1,2]$ par l'application $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

On a $f = \mathrm{e}^u$ où $u : x \mapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $u' : x \mapsto -2x$; f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f' = \mathrm{e}^u \times u' : x \mapsto 2x\mathrm{e}^{-x^2}$.
Puisque, pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-x^2} > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $-2x$. Par conséquent,

$$f'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, 0].$$

En appliquant le théorème de la bijection à la fonction f continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1,0]$, on obtient $f([-1,0]) = [f(-1), f(0)] = \left[\frac{1}{e}, 1\right]$. De manière analogue, on obtient, eu égard à la continuité et à la stricte décroissance de f sur l'intervalle $[0,2]$: $f([0,2]) = [f(2), f(0)] = \left[\frac{1}{e^4}, 1\right]$.
Puisque $f\left([-1,2]\right) = f\left([-1,0] \cup [0,2]\right) = f\left([-1,0]\right) \cup f\left([0,2]\right)$ et que, de manière générale, on a

$$f\left(A \cup B\right) = f(A) \cup f(B)$$

on obtient $f\left([-1,2]\right) = \left[\frac{1}{e}, 1\right] \cup \left[\frac{1}{e^4}, 1\right]$. Puisque $\frac{1}{e^4} < \frac{1}{e}$, on obtient finalement $f\left([-1,2]\right) = \left[\frac{1}{e^4}, 1\right]$.

Exercice 4. Continuité en un point

Soit la fonction $\begin{array}{rccl} f\colon & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left| \begin{array}{ll} a^2x^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & \text{si } x > 1 \end{array}\right. \end{array}$ où a est une constante réelle.
Existent-ils des valeurs de a pour lesquelles f soit continue en 1.

Pour que f soit continue en 1, il faut et il suffit que f ait en 1 une limite à gauche et une limite à droite (nécessairement égale à $f(1)$) et que ces limites coïncident.
Puisque l'on a $\lim\limits_{1^-} f = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(a^2x^2\right) = a^2$ et que $\lim\limits_{1^+} f = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = a\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, f est continue en 1 si et seulement si $a^2 = a$, i.e. si et seulement si $a(a-1) = 0$ ou encore si et seulement si $a = 0$ ou $a = 1$.

Exercice 5. Continuité et limite de suites

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue en 0 telle que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x).$$

Montrer que f est constante.

Soit un réel x ; pour $y = \frac{x}{2}$, on a $f(2y) = f(y)$ ou encore $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$; de manière analogue, on obtient $f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right)$. Une récurrence simple permet alors d'obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).$$

Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \frac{x}{2^n}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (limite d'une suite géométrique de terme général de la forme q^n où $q = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$).

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et que f est continue en 0 ($\lim_{t\to 0} f(t) = f(0)$), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} f\left(u_n\right) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = f(0).$$

Puisque $f\left(u_n\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$, la suite de terme général $f\left(u_n\right)$ est constante de valeur $f(x)$. Puisque $\lim_{n\to+\infty} f\left(u_n\right) = f(0)$, on obtient $f(x) = f(0)$.
Comme ce raisonnement est valable pour tout réel x, la fonction f est bien constante de valeur $f(0)$.

Exercice 6. Fonction trigonométrique

On considère la fonction $f: \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x + \cos^2 x \end{array}$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Tracer alors la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé du plan.

1. La fonction f est dérivable sur $[0,\pi]$ comme somme de deux fonctions dérivables et l'on a
$$\forall x \in [0,\pi], f'(x) = -\sin x + 2\cos x \cos' x = -\sin x(1 + 2\cos x)$$
On étudie alors le signe de chaque facteur du produit :
$$\forall x \in]0,\pi[, -\sin x < 0$$
et de plus, $\sin 0 = \sin\pi = 0$.
Soit $x \in [0,\pi]$, on a alors :
$$\begin{aligned} 1 + 2\cos x \geqslant 0 &\iff \cos x \geqslant \frac{-1}{2} \\ &\iff \cos x \geqslant \cos\frac{2\pi}{3} \\ &\iff x \leqslant \frac{2\pi}{3} \text{ car } \cos \text{ est strictement décroissante sur } [0,\pi] \end{aligned}$$
On dresse alors le tableau de signes de la dérivée :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$-\sin x$	0	$-$	$\vert$	$-$	0
$1+2\cos x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0

On obtient alors le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f	2	$\searrow$	$\frac{-1}{4}$	$\nearrow$	0

2. On obtient alors la courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-dessous :