Logique

Exercice 1. Tables de vérité

Donner les tables de vérité de la conjonction, de la disjonction, de l'implication et de l'équivalence.

Table de vérité de la conjonction

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Table de vérité de la disjonction

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table de vérité de l'implication (non P ou Q)

P	Q	P $\Longrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Table de vérité de l'équivalence

P	Q	P $\Longleftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exercice 2. Propositions vraies ou fausses

Déterminer parmi les propositions suivantes celles qui sont vraies ou fausses.

1. 136 est un multiple de 17 et 2 divise 137.
2. 136 est un multiple de 17 ou 2 divise 137.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, (x+1=0 \text{ et } x+2=0)$.
4. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon$.

1. Cette propositions est fausse, car 2 ne divise pas 137.
2. Cette proposition est vraie, car 136 est un multiple de 17.

3. Cette proposition est fausse, car x devrait être simultanément égal à -1 et à -2.
4. L'assertion est vraie puisque la valeur $a = 0$ convient pour toute valeur de $\varepsilon > 0$.

Exercice 3.

Exprimer en utilisant un langage formalisé les assertions suivantes :

1. Tout entier naturel est pair ou bien impair.
2. Pour tout réel, il existe un entier relatif qui lui est supérieur ou égal.
3. Il existe au moins un nombre réel qui n ?est pas rationnel.
4. Un produit de deux réels est nul si et seulement si l'un au moins de ces réels est nul.
5. Tout réel positif ou nul est un carré.
6. L ?équation $\sin x = x$ admet une solution réelle.
7. L'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est constante.
8. L'application $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est périodique.

1. $n \in \mathbb{N} \Longrightarrow ((\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k)$ ou bien $(\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k+1))$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant x$
3. $\exists x \in \mathbb{R},\ x \notin \mathbb{Q}$
4. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 0 \Longleftrightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \sin x = x$
7. $\exists c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = c$
8. $\exists T \in \mathbb{R}_+^\star,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$

Exercice 4. Négation d'assertions avec quantificateurs

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.
Après avoir donné la signification des assertions suivantes, en donner la négation.

1. $\mathcal{A}_1 :\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$
2. $\mathcal{A}_2 :\ \forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geqslant A,\ f(x) > M$
3. $\mathcal{A}_3 :\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y) \Longrightarrow (f(x) \leqslant f(y))$

1. $\mathcal{A}_1$ signifie que la fonction f ne s'annule pas.
   Sa négation est
   $$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$$
2. $\mathcal{A}_2$ signifie que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
   Sa négation est
   $$\exists M > 0,\ \forall A > 0,\ \exists x \geqslant A,\ f(x) \leqslant M$$
3. $\mathcal{A}_3$ signifie que f est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
   Puisque $P \Longrightarrow Q$ est équivalent à non$P$ ou Q, sa négation est alors P et non$Q$. La négation de $\mathcal{A}_3$ est alors
   $$\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x \leqslant y \text{ et } f(x) > f(y))$$

Exercice 5. Contraposée et arithmétique

Soit n un entier naturel. Énoncer et démontrer la contraposée de l?implication $\mathcal{I}$ suivante :

$$n^3 \text{ est impair } \Longrightarrow n \text{ est impair}$$

La contraposée de $\mathcal{I}$ est

$$n \text{ est pair } \Longrightarrow n^3 \text{ est pair}$$

Démontrons cette dernière implication. Supposons que n est pair. Il existe alors un entier naturel k tel que $n = 2k$. Ainsi $n^3 = (2k)^3 = 8k^3 = 2 \times \left(4k^3\right)$; on a donc $n^3 = 2k'$ où $k' = 4k^3 \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que n^3 est pair.
La contraposée de $\mathcal{I}$ étant équivalente à $\mathcal{I}$, on en déduit la véracité de $\mathcal{I}$.

Exercice 6. Démonstrations par récurrence, disjonction des cas

Montrer que pour tout entier naturel n, $\frac{n(n+1}{2} \in \mathbb{N}$

1. par récurrence ;
2. par disjonction des cas.

1. Démonstration par récurrence.
   Soit pour n entier naturel la proposition $\mathscr{P}(n)$ suivante

$$\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

   (i) Initialisation.- La proposition $\mathscr{P}(n)$ correspondant à $\frac{0\times(0+1)}{2} \in \mathbb{N}$ est trivialement vraie.

   (ii) Hérédité.- Soit k un entier naturel ; supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. On a alors

$$\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N} \tag{HR}$$

   On a

$$\frac{(k+1)((k+1)+1}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)k + (k+1)\times 2}{2} = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

   Puisque d'après l'hypothèse de récurrence (HR), $\frac{k(k+1)}{2} \in \mathbb{N}$, on obtient $\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \in \mathbb{N}$, i.e. $\frac{(k+1)((k+1)+1}{2} \in \mathbb{N}$. Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.

   D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour toute entier naturel n ; on a ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}.$$

2. Démonstration par disjonction des cas.
   Soit n un entier naturel. On est amener à distinguer deux cas en fonction de la parité [1] de n.

1. On peut tout aussi bien utiliser pour cette disjonction des cas la congruence modulo 2

1^{er} **cas :** n est pair se traduit par $n \equiv 0[2]$;

2^{nd} **cas :** n est impair se traduit par $n \equiv 1[2]$.

1^{er} **cas :** n est pair.

Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. On a alors

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{N}$$

2^{nd} **cas :** n est impair.

Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. On a alors

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = \frac{(2k+1) \times 2(k+1)}{2} = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{N}$$